Задания отборочного этапа математического соревнования

«Кубок города Красноярска – 2018»

9-11 класс

1) Графики функций $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, $y=\sqrt{bx^2+cx+a}$, $y=\sqrt{cx^2+ax+b}$ проходят через точку $N(a+b+c;\ a+b+c)$. Определите координаты точки N, если a, b, c – положительные действительные числа.

2) Даны n натуральных чисел. Из них составили все попарные суммы. Среди полученных сумм x оказались чётными и y – нечётными. Докажите, что $x+\frac{n}{2}\geq y$.

3) На отрицательной ветви гиперболы $y=\frac{1}{x}$ отмечена точка A, а на положительной ветви этой гиперболы – точки B и C так, что угол ACB треугольника ABC прямой, а начало координат – точка O – принадлежит катету AC. Найдите длину гипотенузы AB этого треугольника, если его площадь равна $8\sqrt{3}$.

4) Клетки прямоугольной таблицы 5×6 раскрашены в шахматном порядке в чёрный и белый цвета. Во всех точках, являющихся вершинами клеток (всего 42 точки), расставлены числа 0 или 1 так, что сумма четырех чисел в вершинах любой черной клетки чётна, а сумма чисел в вершинах любой белой клетки нечётна. Найдите все возможные значения, которые может принимать сумма чисел в четырёх вершинах данной прямоугольной таблицы.

5) На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ отложили равные отрезки AK, BL, CM и DN. Пусть X – точка пересечения прямых KM и LN, а Y – точка пересечения прямых AN и BM. Докажите, что прямая XY параллельна стороне BC.

6) Дано пять попарно различных натуральных чисел. Известно, что какие-то четыре из десяти сумм этих чисел по три равны 20, 30, 40 и 50. Найдите, какое а) наименьшее, б) наибольшее значение может принимать сумма пяти таких чисел.